# Teoría de Juegos
# Modelos Rectangulares

**Semestre 2020-2**

# Índice

## UNIDAD 3. MODELOS RECTANGULARES O ESTRATÉGICOS

# 3.1. Presentación del modelo y definición

- Existen dos tipos de modelos para los juegos no cooperativos, el de los llamados juegos rectangulares o estratégicos y el de los juegos extensivos.
- Los juegos rectangulares resultan más fáciles de definir que los extensivos, pero hacer un modelo de este tipo sobre un conflicto real es más difícil

# Definición 3.1.

- Un juego rectangular consta de un conjunto $N$, de una colección de conjuntos $D_j$, uno para cada $j$ en $N$, y de una colección de funciones $\varphi_j$ una para cada $j$ en $N$, donde $\varphi_j : \prod_{j \in N} D_j \to R$

- a $N$ le llamaremos el **conjunto de jugadores**,
- a cada $D_j$ , el **conjunto de estrategias puras** del jugador j, y a $\varphi_j$ la **función de pago** del jugador $j$ .
- $(N, \{D_J\}_{j \in N}, \{\varphi_j\}_{j \in N})$ denotará el juego que tiene el conjunto de jugadores $N$, los conjuntos de estrategias puras $D_j$ y las funciones de pago $\varphi_j$ .
- $D$ denota el producto cartesiano $\prod_{j \in N} D_j$ $(igual\ a$ $D_1 x D_2 x \ldots x D_n$ si $N$ es finito y tiene $n$ elementos)
- a los elementos de $D$ les llamaremos **perfiles de estrategias puras**

# Juegos finitos e infinitos

- En dependencia del número de posibles estrategias los juegos se dividen en:

1. Finitos

   Es el juego en el que el jugador solo tiene un número finito de estratègies. Esto es, $N$ es finito.

2. Infinitos

# Definición 3.2

- Si $N$ y los conjuntos $D_J$ son finitos, se dice que el juego es finito.

- "cada jugador solo puede tener un número finito de estrategias"

# Juego Finito

- A un juego finito en el que el jugador *A* puede tener *m* estrategias y el jugador *B*, *n* estrategias se le llama juego de *m x n*.
- Sea
  - un juego *m x n* de dos jugadores *A (ej. nosotros)* y *B (por ej, adversario)*
  - *con estrategias* $A_i$ *y* $B_j$ donde *i:* {*1*, 2, 3, …,*m*} y *j:* {*1*, 2, 3, …,*m*}

# Juegos en Forma Normal (rectangular)

- Esta manera de describir un juego se basa sólo en estrategias: codifica toda la información de la forma extensiva en una matriz de pagos.

# Representación de Juegos de dos jugadores en forma normal

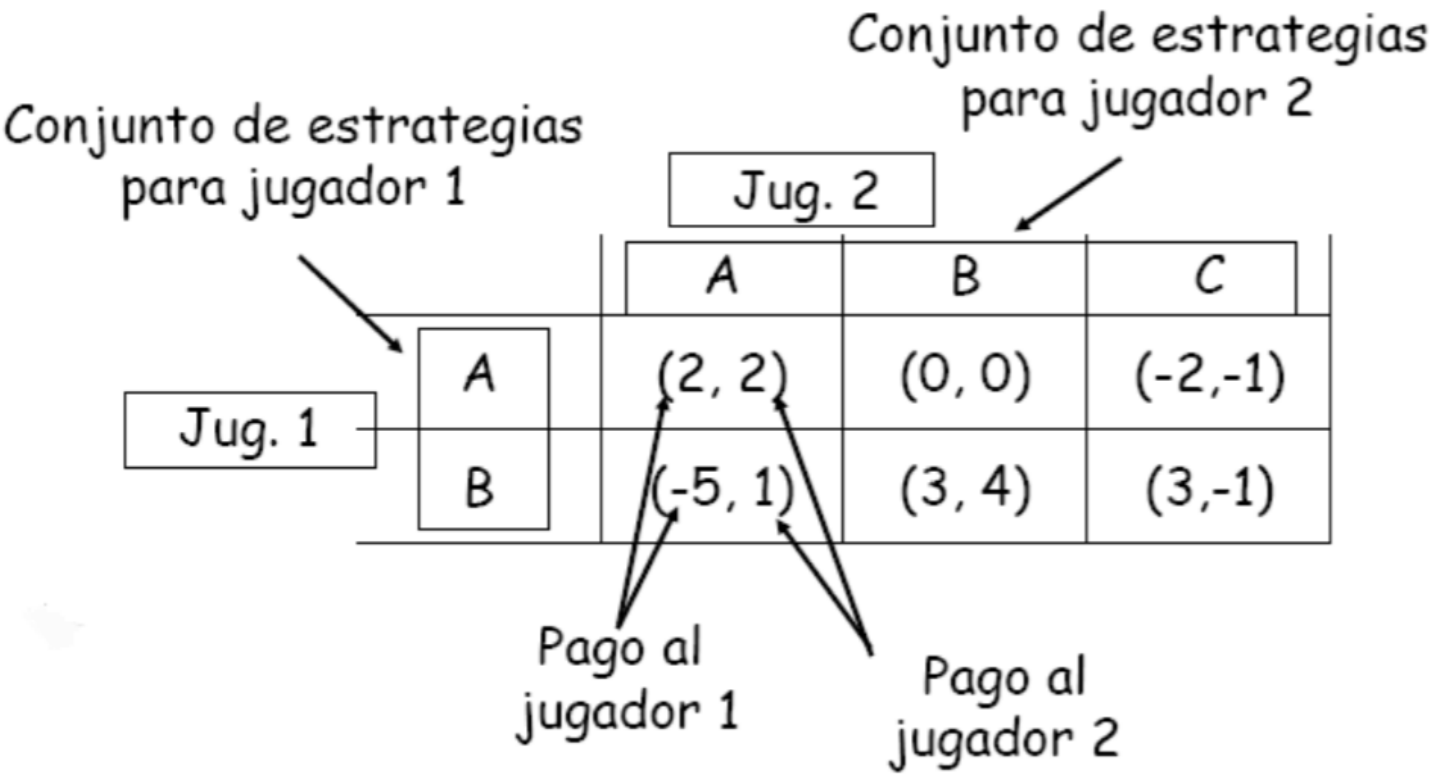
- Se hace un listado con las estrategias posibles de cada jugador.
- Se colocan las estrategias en una matriz.
- Las filas de la matriz corresponden a las estrategias del jugador 1, las columnas a las estrategias del jugador 2.
- Las ganancias de las ramas terminales se colocan en las casillas correspondientes de la matriz.

# Para N=2

- Sea un juego finito donde $N = \{A, B\}$
- Sea
  - un juego m x n de dos jugadores A (ej. nosotros) y B (por ej, adversario)
  - con estrategias $A_i$ y $B_i$ donde $i$: $\{1,2,3 \ldots, n\}$ y $j$: $\{1,2,3 \ldots, m\}$

# Representación de Juegos de dos jugadores en forma normal

- Representación de un juego



# Ejemplo 3.1. El Dilema del Prisionero

| | confesar | no confesar |
|---|---|---|
| confesar | (10 años, 10 años) | (libre, 20 años) |
| no confesar | (20 año, libre) | (2 años, 2 años) |

- Revisemos si este juego cumple con la definición 3.1
- $N$ =2; $D_j$ = (Confesar, No Confesar); para $j$=1,2

$$\varphi(confesar),(no\ confesar) = (0, -20)$$
$$\varphi(no\ confesar),(no\ confesar) = (-2, -2)$$
$$\varphi(confesar),(confesar) = (-10, -10)$$
$$\varphi(no\ confesar),(confesar) = (-20, 0)$$
$$\therefore el\ juego\ cumple\ con\ la\ definición$$

# Ejemplo 3.2. Pagar la cuenta

- Tres amigos que desean pagar la cuenta a través de un disparejo definen dos reglas, si salen iguales la cuenta se divide en tres partes iguales; sino, paga el que quede disparejo.
- Revisemos si cumple con la definición de juego
- $N$ =3; $D_j$ = (pulgar arriba, pulgar abajo); para $j$=1,2,3

$$\varphi(pulgar\ arriba),(pulgar\ arriba)(pulgar\ arriba)=(\frac{C}{3},\frac{C}{3},\frac{C}{3})$$
$$\varphi(pulgar\ abajo),(pulgar\ arriba)(pulgar\ arriba)=(C,0,0)$$
$$\varphi(pulgar\ arriba),(pulgar\ abajo)(pulgar\ arriba)=(0,C,0)$$
$$\varphi(pulgar\ arriba),(pulgar\ arriba)(pulgar\ abajo)=(0{,}0,C)$$
$$\varphi(pulgar\ abajo),(pulgar\ abajo)(pulgar\ abajo)=(\frac{c}{3},\frac{c}{3},\frac{c}{3})$$
$$\varphi(pulgar\ arriba),(pulgar\ abajo)(pulgar\ abajo)=(C,0,0)$$
$$\varphi(pulgar\ abajo),(pulgar\ arriba)(pulgar\ abajo)=(0,C,0)$$
$$\varphi(pulgar\ abajo),(pulgar\ abajo)(pulgar\ arriba)=(0,0\ ,C)$$
$$\therefore\ el\ juego\ cumple\ con\ la\ definición$$

# Perfil de Estrategias

- Un perfil de estrategias es y se denota

$$\sigma = \left((confesar), (no\ confesar)\right)$$

- Para el juego del disparejo un perfil de estrategias

$$\sigma = \left((pulgar\ arriba), (pulgar\ arriba)(pulgar\ abajo)\right)$$

# Ejercicio 3.1.

- Revisar si el juego de la gallina, la batalla de los sexos, y el juego de piedra, papel y tijeras, cumplen con la definición de juego. (Exhibir todos los perfiles de estrategias)

# Definición 3.3

- Se dice que $\sigma^*$en $D$ es un **equilibrio de Nash** en estrategias puras, si para cada jugador j en N se cumple:

$$\varphi_j(\sigma^*) \geq \left(\sigma^* \middle| \sigma^j\right) \text{ para toda } \sigma^j \text{ en } D_j$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que $\sigma^*$ es un equilibrio estricto, es decir, si para cada $j$ en $N$, $\varphi_j(\sigma^*) > \left(\sigma^* \middle| \sigma^j\right)$ para toda $\sigma^j$ en $D_j$

# Ejemplo 3.3.

- Dilema del Prisionero

| | **1** | **2** |
|---|---|---|
| **a** | (-10,-10) | (0,-20) |
| **b** | (-20,0) | (-2,-2) |

- Perfil de estrategias $\sigma^*$(confesar, no confesar)
  - Yo jugador uno, sé que el jugador dos va a confesar, entonces elijo lo mejor para mi que es confesar
  - Ahora, supongo que el jugador 2 no va a confesar y elijo lo mejor para mi que es confesar
  - Sí el jugador 2 hace un análisis similar, entonces se llega a la máxima ganancia conjunta que es el equilibrio de Nash.

- Matemáticamente se tiene:

$$\varphi_2\big((confesar),(confesar)\big) \geq \varphi_2\ \big((confesar),(confesar)\big)$$
$$\varphi_2\big((confesar),(confesar)\big) \geq \varphi_2\ \big((confesar),(no\ confesar)\big)$$
$$\varphi_2\big((confesar),(confesar)\big) \geq \varphi_2\ \big((no\ confesar),(confesar)\big)$$
$$\varphi_2\big((confesar),(confesar)\big) \geq \varphi_2\ \big((no\ confesar),(no\ confesar)\big)$$

$\therefore\ \sigma^*\ [(confesar)(confesar)]$ es un equilibrio de Nash

# Ejemplo 3.4

| | **1** | **2** |
|---|---|---|
| **a** | (7,9) | (2,4) |
| **b** | (1,5) | (5,7) |
| **c** | (6,15) | (9,2) |

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi_1\big((a),(1)\big)$ | | $\varphi_1\big((b),(1)\big)$ |
| 7 | > | 1 |
| $\varphi_1\big((a),(1)\big)$ | | $\varphi_1\big((c),(1)\big)$ |
| 7 | > | 6 |
| $\varphi_1\big((a),(1)\big)$ | | $\varphi_1\big((b),(1)\big)$ |
| 7 | > | 1 |
| $\varphi_1\big((a),(1)\big)$ | | $\varphi_1\big((b),(2)\big)$ |
| 7 | > | 1 |

$$\therefore\ \sigma^*[(a)(1)]e, \in N$$

# Ejemplo 3.5

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| **a** | (7,-9) | (2,4) |
| **b** | (1,5) | (5,7) |
| **c** | (6,15) | (9,2) |

$\therefore \, el \; juego \; no \; tiene \; equilibrio \; de \; Nash$

# Ejercicio 3.2.

- Revisar si el juego de la gallina, la batalla de los sexos, y el juego de piedra, papel y tijeras, tienen equilibrio de Nash. (Exhibir todos los perfiles de estrategias)

# Definición 3.4

Dado un perfil en estrategias $\hat{\sigma}$ en $D$, decimos que $\tilde{\sigma}^j$ *en* $D^j$ es una mejor respuesta del jugador j a $\hat{\sigma}$, si

$$\varphi_j(\hat{\sigma}|\tilde{\sigma}^j) \geq \varphi_j(\hat{\sigma}|\sigma^j) \text{para toda } \sigma^j \text{en } D^j$$

Además, decimos que $\tilde{\sigma}^j \in D^j$ es una mejor respuesta estricta de $j$ a $\hat{\sigma}$, si

$\varphi_j(\hat{\sigma}|\tilde{\sigma}^j) \geq \varphi_j(\hat{\sigma}|\sigma^j)$, para toda $\sigma^j$ en $D^j$, y $\varphi_j(\hat{\sigma}|\tilde{\sigma}^j) > \varphi_j(\hat{\sigma})$

Es claro que $\sigma^*$ es un equilibrio de Nash (estrategias puras) si y solo si $\sigma^{*j}$ es una mejor respuesta de j a $\sigma^*$ para toda j $\in N$

- Para los juegos bipersonales finitos resulta conveniente representar al juego con una matriz, a cada uno de sus renglones asignarle una de las estrategias del jugador 1, a cada una de las columnas, una del jugador 2 y el término de la matriz correspondiente al renglón $i$ y a la columna j será el vector $(\varphi_1(i,j), \varphi_2(i,j))$
- De hecho podemos hablar de dos matrices de pago, la del jugador 1, $(\varphi_1(i,j))$ y la del jugador 2, $(\varphi_2(i,j))$, por eso, también se llaman juegos bimatriciales.

# Juego de suma cero

- Decimos que un juego es de suma cero si $\sum_{j \in N} \varphi_j(\sigma) = 0$ para toda $\sigma \epsilon D$.
- entonces

| | **águila** | **sol** |
|---|---|---|
| **águila** | $(-1,1)^0$ | $(1,-1)^0$ |
| **sol** | $(1,-1)^0$ | $(-1,1)^0$ |

esto es, la suma de los pagos de cada elección es igual a cero.

# Ejemplo 3.6. El juego del volado

Dos amigos quieren decidir a quién le toca ir a comprar los cigarros. El primero saca una moneda y la coloca sobre la mesa cubriéndola con la mano, le pide a su compañero que adivine cuál es la posición en la que la puso, ¿el águila (escudo) arriba o el sol (cara) ? Si es descubierto, tendrá que ir el mismo a la compra, pero si no, le tocará al segundo amigo. La matriz de pago es

| | **águila** | **sol** |
|---|---|---|
| **águila** | (-1,1) | (1,-1) |
| **sol** | (1,-1) | (-1,1) |

Es fácil observar que este juego no tiene equilibrio de Nash

# Ejemplo 3.6. El juego del volado (2)

- En los juegos bipersonales de suma cero, basta trabajar con la función $\varphi_1$, función de pago del jugador 1, pues $\varphi_1 = -\varphi_2$, llamaremos $\varphi$ $a$ $\varphi_1$.

# Actividad 3.3.

a. Los juegos de la gallina, batalla de los sexos y piedra, papel y tijeras PPT, son de suma cero?

b. ¿Cómo será la matriz del jugador 2?, si la matriz del jugador 1 es:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

# Definición 3.5.

- Se dice que el número real $x$ es asegurable en estrategias puras (*ep*) para el jugador $j$, si existe $\hat{\sigma}^j \in D_j$, tal que $\varphi_j\left(\sigma \middle| \hat{\sigma}^j\right) \geq x$ para toda $\sigma \in D$.
- Consideramos, ahora, $A_j' = \{x \in R | x\ asegurable\ para\ j\}$

# Proposición 3.5.1.

- Si el juego $\left(N, \{D_j\}, \varphi\right)$ $es\ finito, entonces\ para\ toda\ j \in N, existe\ el\ supremo\ de\ \widetilde{A_j'}$

# *Demostración*

$Sea\ m_j = \min_{(\sigma|\sigma^j)} \varphi_j(\sigma|\sigma^j)\ , m_j\ existe,$

$pues\ el\ conjunto\ de\ valores\ que\ toma\ \varphi_j$ es finito

Asimismo, $m_j\ está\ en\ \widetilde{A'_j}, pues\ para\ cualquier\ \bar{\sigma}^j$

$\in D_j, \varphi_j(\sigma|\bar{\sigma}^j) \geq m_j. Por\ lo\ que\ \widetilde{A'_j} \neq 0$

$por\ otro\ lado, \text{máx}_j = \underset{(\sigma|\sigma^j)}{\text{máx}}\ (\sigma|\sigma^j)\ también\ existe$

$Para\ toda\ x \in \widetilde{A'_j}, existe\ \tilde{\sigma}^j \in D_j\ tal\ que\ \varphi_j(\sigma|\bar{\sigma}^j) \geq x.$

$Pero, \text{máx}_j \geq \varphi_j(\sigma|\bar{\sigma}^j) \geq x$

$Es\ decir \widetilde{A'_j}\ es\ un\ subconjunto\ de\ reales\ no\ vacío\ y$

$acotado\ superiormente, por\ lo\ que\ tiene\ supremo$

# Proposición 3.5.2.

$$v_j' = \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\sigma \in D} \varphi_j$$

*Demostración.*

$Sea\ x \in \widetilde{A_j'}, entonces\ existe\ \hat{\sigma}^j tal\ que\ \varphi_j\left(\sigma \middle| \hat{\sigma}^j\right)$
$\geq x, para\ toda\ \sigma\ en\ D$

$Tenemos\ que\ \min_{\left(\sigma \middle| \hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma \middle| \hat{\sigma}^j\right) \geq x$

$Pero, \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\left(\sigma \middle| \hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma \middle| \sigma^j\right) \geq \min_{\left(\sigma \middle| \hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma \middle| \hat{\sigma}^j\right) \geq x$

$Es\ decir, \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\left(\sigma \middle| \hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma \middle| \sigma^j\right) es\ una\ cota\ superior\ de\ \widetilde{A_j'}$

$Por\ lo\ que\ se\ cumple\ que\ \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\left(\sigma \middle| \hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma \middle| \sigma^j\right) \geq v_j'$

$Por\ otro\ lado, existe\ \tilde{\sigma}^j \in D_j, tal\ que$

$$\varphi_j(\tilde{\sigma}|\tilde{\sigma}^j) = \min_{(\sigma|\hat{\sigma}^j)} \varphi_j\left(\sigma|\tilde{\sigma}^j\right) = \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{(\sigma|\hat{\sigma}^j)} \varphi_j\left(\sigma|\sigma^j\right)$$

$Es\ decir, \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{(\sigma|\hat{\sigma}^j)} \varphi_j(\sigma|\sigma^j) \leq \varphi_j(\sigma|\tilde{\sigma}^j), para\ toda\ \sigma \in D$

$Lo\ que\ significa\ que \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{(\sigma|\hat{\sigma}^j)} \varphi_j(\sigma|\sigma^j) \in \widetilde{A'_j}$

$Pero, entonces, \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{(\sigma|\hat{\sigma}^j)} \varphi_j(\sigma|\sigma^j) \leq v'_j$

$Por\ lo\ tanto, \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{(\sigma|\hat{\sigma}^j)} \varphi_j(\sigma|\sigma^j) = v'_j$

$Diremos\ que\ \hat{\sigma}^j es\ una\ estrategia\ conservadora\ (ep)$ $para\ el\ jugador\ j, si$ éste $gana\ por\ lo\ menos\ v_j', cuando$ $escoge\ \hat{\sigma}^j. A\ v_j' se\ le\ llamar$á $el\ m$á$ximo\ asegurable\ para\ el$ $jugador\ j\ en\ estrategias\ puras\ (ep). En\ el\ proceso\ de\ la$ $prueba\ se\ ha\ demostrado\ que\ existen\ estrategias$ $conservadoras\ (ep), para\ cualquierjuego\ y\ para\ cada$ $jugador.$

# Ejemplo 3.7.

- *Juego de suma cero*

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ \text{mín} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} (-\mathbf{7},7)^0 & (2,-2)^0 & (4,-4)^0 \\ (-1,1)^0 & (3,-\mathbf{3})^0 & (-\mathbf{5},5)^0 \\ (0,\mathbf{0})^0 & (-\mathbf{8},8)^0 & (6,-6)^0 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-6} \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c} \textbf{mín} \\ \mathbf{-7} \\ \mathbf{-5} \\ \mathbf{-8} \\ \\ \end{array}$$

$máxmín = V_1 = -5$

$máxmín = V_2 = 0$

*Máximo asegurable del juego Max=0 (juego de suma cero)*

$\therefore V_1 = -5, V_2 = 0$, *Max= 0*

*De otra manera:*

$$V_1 = máxmín\ \varphi_j = mín(-7,-5,-8) = -5$$
$$V_2 = máxmín\ \varphi_j = máx(0,-3,-6) = 0$$

# Actividad 3.4.

- Sea el juego de suma cero

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} -7 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Encontrar $V_1, V_2\ y\ Max$

# Definición 3.6.

- Decimos que $(N, \{D_j\}_j \in N, \varphi'$ es un **juego antagónico** en estrategias puras, si $\sum_{j \in N} V_j' = Max$

# Ejemplo 3.8

- *Retomando el ejemplo 3.7*

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \text{mín} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} (-\mathbf{7},7)^0 & (2,-2)^0 & (4,-4)^0 \\ (-1,1)^0 & (3,-\mathbf{3})^0 & (-\mathbf{5},5)^0 \\ (0,\mathbf{0})^0 & (-\mathbf{8},8)^0 & (6,-6)^0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -\mathbf{7} \\ -\mathbf{5} \\ -\mathbf{8} \end{array} \\
\text{mín} & \begin{array}{ccc} 0 & -3 & -6 \end{array} &
\end{array}
$$

*máxmín*$=V_1 = -5$

*máxmín*$=V_2 = 0$

*Máximo asegurable del juego Max=0 (juego de suma cero)*

$\therefore V_1 = -5, V_2 = 0,$ *Max= 0*

$$\sum_{j\in N} V_j' = Max$$

$$V_1 + V_2 = 0$$

$$-5 \neq 0 \quad \therefore \textit{No es antagónico}$$

# Ejemplo 3.9.

- *Juego de suma cero*

$$\begin{array}{cccccl} & 1 & 2 & 3 & & \textit{mín} \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} (7,-7) & (9,-9) & (13,-13) \\ (6,-6) & (12,-12) & (10,-10) \end{bmatrix}} & & \begin{matrix} 7 \\ 6 \end{matrix} \quad \textit{máxmín}=V_1 = 7 \\ \textit{mín} & -7 & -12 & -13 & & \textit{máxmín}=V_2 = -7 \end{array}$$

*Máximo asegurable del juego Max=0 (juego de suma cero)*

$\therefore$ $V_1 = 7$, $V_2 = -7$, *Max= 0*

$$\sum_{j \in N} V_j' = Max$$

$$V_1 + V_2 = 0$$

$$7 - 7 = 0 \;\; \therefore \textit{Es antagónico}$$

Equilibrio de Nash (EN)=$\sigma^* = (a, 1)$

# Actividad 3.5

- $$\begin{pmatrix} (-8,18) & (2,8) & (10,0) \\ (8,2) & (5,5) & (12,-2) \\ (15,-5) & (4,6) & (7,3) \end{pmatrix}$$

Encontrar $V_1, V_2,$ $el\ máximo\ asegurable, y\ si\ el\ juego\ es\ antagónico$

# Proposición 3.5.3

$Si\ \sigma^{*} es\ un\ equilibrio\ de\ Nash\ (ep), entonces$

$$\varphi(\sigma^{*}) \geq V_j'$$

$Demostración$

$Sea\ \hat{\sigma}\ una\ estrategia\ conservadora\ del\ jugador\ j,$

$$\varphi\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right) \geq V_j'$$

$para\ toda\ \sigma$

$como\ \sigma^* es\ un\ equilibrio\ de\ Nash\ en\ estrategias\ puras,$

$$\varphi(\sigma^*) \geq \varphi\left(\sigma^*\middle|\sigma^j\right) \forall\ \sigma^j \in D_j$$

$en\ particular,$

$$\varphi(\sigma^*) \geq \hat{\sigma}^j\left(\sigma^*\middle|\hat{\sigma}^j\right)$$

$Por\ lo\ tanto$

$$\varphi(\sigma^*) \geq V_j'$$

$Para\ (N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi', un\ juego\ arbitratio, denotamos$
$cómo\ Max\ a\ la\ máxima\ ganancia\ conjunta. Es\ decir$

$$Max = \max_{\sigma \in D} \sum_{j \in N} \varphi(\sigma)$$

$Si\ cada\ jugador\ j\ escoge\ una\ estrategia\ conservadora\ \hat{\sigma}^j,$
$la\ suma\ de\ las\ ganancias\ de\ todos\ no\ rebasa\ a\ Max.$
$Esto\ es,$

$$\sum_{j \in N} \varphi_j(\hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2, \dots, \hat{\sigma}^n)$$

$Pero, entonces, tenemos\ la\ proposición:$

$$\sum_{j = N} V_j' \leq Max$$

# Proposición 3.5.4.

P$ara\ cualquier\ juego \left(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi'\right)$ se cumple que $\sum_{j=N} V_j' \leq Max$.

$Si\ el\ juego\ es\ bipersonal\ de\ suma\ cero,$ la desigualdad significa que

$$v_j^1 \leq -v_j^2$$

$Por\ ser\ de\ suma\ cero\ el\ Max = 0$

$$\sum_1^2 \varphi_j\,(\hat{\sigma}) \leq 0$$

$Pero\ como\ es\ bipersonal\ y\ se\ usan\ las\ estrategias\ conservaroras\ entonces$

$$\sum_1^2 \varphi_j\,(\hat{\sigma}) = v_j^1 + v_j^2$$

Sustituyendo $\qquad v_j^1 + v_j^2 \leq 0$

$Despejando$ $\qquad v_j^1 \leq -v_j^2$

$Esta\ desigualdad\ induce\ una\ división\ entre\ los\ juegos,$
$que\ resulta\ muy\ importante\ para\ la\ problemática\ que$
$queremos\ estudiar;\ los\ juegos\ que\ cumplen:$

$$\sum_{j=N} V_j' = Max$$

$y\ los\ que\ cumplen$

$$\sum_{j=N} V_j' < Max$$

$en\ el\ primer\ caso, cuando \sum_{j=N} V_j' = Max\ los\ jugadores,$
$actuando\ cada\ uno\ con\ sus\ propias\ fuerzas, logran\ repartirse\ Max$
$(los\ jugadores\ tienen\ intereses\ contrapuestos).$

# Proposición 3.5.5.

Sea un juego $\left(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi'\right), antagónico\ (ep), entonces:$

$a)\ si\ \sigma^* \in D\ es\ un\ equilibrio\ de\ Nash\ (ep), \varphi_j(\sigma^*) = V_j'$

$b)\ si\ \sigma^{*j} \in D_j\ es\ conservadora\ (ep), \varphi_j(\sigma^*) = V_j'$

## *Demostración*

*Para toda* $j \in n, \varphi_j(\sigma^*) \geq V_j'$, *como se demostró en 3.5.3.*

*Supongamos que, para alguna* $k \in N, \varphi_k(\sigma^*) \geq V_k'$.

*Entonces*

$$\sum_{j=N} \varphi(\sigma^*) > \sum_{j=N} V_j', \sigma^* \in D$$

*Como es antagónico*

$$\sum_{j=N} V_j' = Max$$

*Lo que nos lleva a*

$$\sum_{j=N} \varphi(\sigma^*) > \sum_{j=N} V_j' = Max$$

*Es decir que*

$$\sum_{j=N} \varphi(\sigma^*) > \mathrm{Max}$$

*con lo que llegamos a un absurdo, es decir* $\sum_{j=N} \varphi(\sigma^*) > \sum_{j=N} V_j'$, para toda j

# Ejemplo 3.10

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \begin{array}{ccccc} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4} & \mathit{5} \end{array} & V_1 \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} (2,-3) & (2,9) & (4,4) & (3,8) & (4,2) \\ (8,2) & (7,5)^{*} & (7,3) & (7,5)^{*} & (13,-1) \\ (-1,4) & (5,5) & (7,2) & (6,5) & (0,5) \\ (8,2) & (7,5)^{*} & (7,3) & (7,5)^{*} & (10,1) \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 7 \\ -1 \\ 7 \end{array} \\
V_2 & \begin{array}{ccccc} -3 & 5 & 2 & 5 & -1 \end{array} &
\end{array}$$

*candidatos a equilibrio de Nash

$V_1 = 7,\ V_2 = 5;\ \sum V_j = 12 = Max$

Estrategia conservadora ((b)(2)) ((d)(2)) ((b)(4)) ((d)(4))

Equilibrio de Nash $\varphi_1(b,2) = 7 \geq \varphi_1\begin{pmatrix} a \\ c, 2 \\ d \end{pmatrix}$

$$\varphi_2(b,2) = 5 \geq \varphi_1\begin{pmatrix} & 1 \\ b, & 3 \\ & 4 \\ & 5 \end{pmatrix}$$

# Actividad 3.6

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4} \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} (3,0) & (5,2) & (4,1) & (7,1) \\ (1,7) & (1,3) & (5,2) & (4,2) \\ (0,8) & (4,1) & (5,-1) & (1,-1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Evaluar si el juego es antagónico y si tiene equilibrio de Nash

# Definición 3.7

$Considerese\ el\ juego\ rectangular\ \left(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi'\right),$

$Decimos\ que\ \tilde{\sigma} \in D_j, se\ cumple\ que$

$$\varphi_j\left(\tilde{\sigma}/\sigma^j\right) \leq \varphi_j(\tilde{\sigma}) \leq \varphi_j\left(\sigma/\tilde{\sigma}^j\right)$$

$Decimos\ \sigma^* \in D\ es\ punto\ silla\ del\ juego\ \left(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi'\right), si$

$es\ punto\ silla\ de\ la\ función\ de\ pago\ de\ cada\ jugador$

# Proposición 3.7.1

$Si\ \sigma^{*} es\ un\ punto\ silla\ del\ juego \left(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi'\right)$
$entonces\ se\ cumplen$:

$a)\ \sigma^{*}\ es\ equilibrio\ de\ Nash\ (ep)$

$b)\ \sigma^{*} está\ formada\ por\ estrategias\ conservadoras$
$para\ cada\ jugador$.

# Demostración

$Como\ \sigma^{*} es\ punto\ silla, se\ cumple\ que, para\ todo\ jugador\ j,$
$para\ toda\ \sigma \in D\ y\ para\ toda\ \sigma^{j} \in D_j, se\ cumple\ que$

$$\varphi_j\left(\sigma^{*}/\sigma^{j}\right) \leq \varphi_j(\sigma^{*}) \leq \varphi_j\left(\sigma/\tilde{\sigma}^{*j}\right)$$

$Tomando\ en\ cuenta\ las\ n\ desigualdades\ del\ lado\ izquierdo, tenemos\ que\ se\ cumplen\ las\ condiciones\ para\ afirmar\ que\ \sigma^{*}\ es\ equilibrio\ de\ Nash\ (ep). Por\ lo\ que\ la\ afirmación\ del\ inciso\ es\ válida.$

$Pero\ si\ \sigma^{*} es\ equilibrio\ de\ Nash, para\ toda\ j \in N, entonces,$
$\varphi_j(\sigma^{*}) \leq V_j'\ por\ las\ desigualdades\ de\ la\ derecha, \varphi_j\left(\sigma^{*j}\right) \leq V_j' para\ toda\ j \in N. Lo\ que\ quiere\ decir\ que\ \varphi_j\left(\sigma^{*j}\right) es\ una\ estrategia\ conservadora\ del\ jugador\ j.\ Y\ como\ esto\ es\ cierto\ para\ cualquier\ jugador, \sigma^{*}\ está\ formado\ por\ estrategias\ conservadoras.$

# Ejemplo 3.11

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & V_1 \\ a & (6,4) & (4,1) & (5,6) & 4 \\ b & (\hat{7},3) & (9,4) & (\hat{7},\hat{5}) & 7 \\ c & (5,3) & (9,9) & (6,8) & 5 \\ V_2 & 3 & 1 & 5 & \end{array}$$

$V_1 = 7$
$V_2 = 5$
$V_1+V_2=12$
Max=18

$$\sum V_j \neq Max$$

$\therefore$ *no es antagónico*

Estrategias conservadoras

$D_1^* = ((c)(2))$

$D_3^* = ((b)(3))$

$\tilde{\sigma}_1 = (b)(1)$ $\quad \tilde{\sigma}_2 = (b)(3)$

$\tilde{\sigma}_1 = (b)(3)$

El juego tiene punto silla ya que coinciden en su mejor estrategia, ambos jugadores tienen punto silla en ((b)(3))

# Actividad 3.7.

El juego de la gallina, el dilema del prisionero, la batalla de los sexos, son antagónicos? Tienen punto silla?