VII. Pruebas de Hipótesis

VII. Concepto de contraste de hipótesis

- Podemos definir un **contraste de hipótesis** como un procedimiento que se basa en lo observado en las muestras y en la teoría de la probabilidad para determinar si la hipótesis es un enunciado razonable.

VII.1. Contraste de hipótesis de una población

- Un contraste de hipótesis es un proceso estadístico que permite elegir una hipótesis de trabajo de entre dos posibles y antagónicas.
- El contraste comienza con la formulación de dos hipótesis sobre el valor de algún parámetro poblacional, siendo ambas incompatibles (si una es cierta, la otra necesariamente ha de ser falsa).
- Supondremos cierta una de ellas, a la cual llamaremos hipótesis nula H_0, y trataremos de determinar hasta qué grado las observaciones registradas son coherentes con H_0.
- Sólo en caso de que haya fuertes indicios de incompatibilidad entre el supuesto de que H_0 sea cierta y los datos obtenidos empíricamente, descartaremos H_0 como hipótesis de trabajo y en su lugar tomaremos como cierta la hipótesis alternativa H_1.

VII.1. Contraste de hipótesis de una población

- Dos ejemplos de contrastes de hipótesis serían:

$$(i)\ \begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu \neq 0 \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} H_0 : \sigma = 2{,}5 \quad (\leq) \\ H_1 : \sigma > 2{,}5 \end{cases}$$

Contraste Bilateral ($\neq$) Contraste Unilateral ($>$)

VII.1. Contraste de hipótesis de una población

- En el siguiente esquema se representan las cuatro combinaciones posibles (en función de la decisión que tomemos y de la certeza o no de la hipótesis nula) de todo contraste de hipótesis:

Decisión tomada	**Hipótesis Nula H_0** Verdadera	Falsa
No descartar H_0	Decisión correcta de tipo A **Probabilidad 1-α**	Error de tipo II **Probabilidad β**
Descartar H_0	Error de tipo I **Probabilidad α**	Decisión correcta de tipo B **Probabilidad 1-β**

VII.1. Contraste de hipótesis de una población

- Tendremos una decisión correcta de **tipo A** cuando hayamos optado por no descartar la hipótesis nula y resulte que ésta es cierta.
- Una decisión correcta de **tipo B** ocurrirá cuando hayamos decidido descartar la hipótesis nula y resulte que ésta era falsa.
- Hablaremos de **error de tipo I** cuando hayamos descartado la hipótesis nula siendo ésta cierta (error que se considera como muy grave).
- Acontecerá un **error de tipo II** cuando hayamos optado por no descartar la hipótesis nula y resulte que ésta es falsa.

VII.1. Contraste de hipótesis de una población

- Dado que descartaremos o no la hipótesis nula a partir de muestras obtenidas (es decir, no dispondremos de información completa sobre la población), no será posible garantizar que la decisión tomada sea la correcta.
- Lo que sí podremos hacer es controlar la probabilidad de cometer un error. Ahora bien, ¿cuál de ellos? En un contraste de hipótesis lo interesante es rechazar la hipótesis nula. Por lo tanto el riesgo que estoy dispuesto a asumir de "equivocarme al rechazar la H_0", error de tipo I, es el que queremos controlar. Fijémonos que a error de tipo I más pequeño más seguridad al rechazar la hipótesis nula. Ahora bien, al empequeñecer el error de tipo I estamos aumentando el error de tipo II, puesto que cuanta más probabilidad de aceptar H_0 más posibilidades de que aceptemos casos donde se cumpla H_1 (error de tipo II). Usualmente el error de tipo I se fija en 0,01, 0,05 ó 0,10.

VII.1. Contraste de hipótesis de una población

- Fijado el error de tipo I para empequeñecer el error de tipo II debemos aumentar el tamaño de muestra. Ahora bien, aumentar el número de muestra no siempre es posible ya sea por falta de presupuesto o tiempo, por inviabilidad, …

VII.1. Contraste de hipótesis de una población

- Llamaremos **potencia del contraste** a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo ésta falsa. Fijémonos que, a mayor potencia, mejor contraste, puesto que podremos aceptar la hipótesis alternativa con poca probabilidad de que sea falsa.

VII.1. Contraste de hipótesis de una población

- Denotaremos por α el **nivel de significación** o probabilidad de cometer un error de tipo I, y por β la probabilidad de cometer un error de tipo II. Con lo cual, la potencia es de (1 – β). Como ya hemos indicado usualmente α se fija en 0,01, 0,05 o 0,10.
- Notamos otra vez que α, β, y el tamaño muestral *n* están interrelacionados, de forma que si hacemos disminuir cualquiera de ellos alguno de los dos restantes habrá de aumentar. Así, p.e., si queremos tomar un α menor deberemos aceptar que aumente β o bien incrementar el tamaño de la muestra *n*.

VII.1. Contraste de hipótesis de una población

- Llamaremos **estadístico de contraste** a una v.a. calculada a partir de las observaciones muestrales, la cual se usa conjuntamente con un criterio de decisión (establecido a priori) para determinar si hemos de descartar o no la hipótesis nula.

VII.2. Concepto de p-valor

- Definimos el **p-valor** como la probabilidad de que, suponiendo cierta H_0, el estadístico de contraste tome un valor al menos tan extremo como el que se obtiene a partir de las observaciones muestrales, i.e., el p-valor es el área de la cola de la distribución (o colas si el test es bilateral) definida a partir del estadístico de contraste:
  1. El p-valor sólo puede calcularse una vez tomada la muestra, obteniéndose niveles críticos distintos para cada muestra.
  2. El p-valor puede interpretarse como un nivel mínimo de significación en el sentido de que niveles de significación α, iguales o superiores al *p - valor* llevarán a rechazar la hipótesis nula. Por tanto, cuanto menor sea el *p - valor* mayor es el grado de incompatibilidad de la muestra con H_0, lo que lleva a rechazar H_0.
  3. El cálculo del p-valor no proporciona de modo sistemático una decisión entre H_0 y H_1.

VII.2. Concepto de p-valor

- Esta forma de abordar los tests, nos permite una visión más amplia, por cuanto nos da información de para qué niveles de significación puede rechazarse la hipótesis nula, y para cuales no se puede.
- Para lo que sigue, tendremos en cuenta la siguiente propiedad:

  Supuesto: X se distribuye según una normal.

- Recordatorio: Si X *se distribuye normalmente, entonces* $\bar{X}$ también lo hará. En caso contrario, necesitaremos tomar un tamaño muestral n "grande" (generalmente, $n > 30$ es suficiente).

VII.3. Uso del p-valor en los contrastes sobre μ con σ conocida

- Dada una población *X* (que sigue una distribución cualquiera), con media μ (desconocida) y desviación estándar σ conocida, se trata de contrastar alguno de los tres tests siguientes:

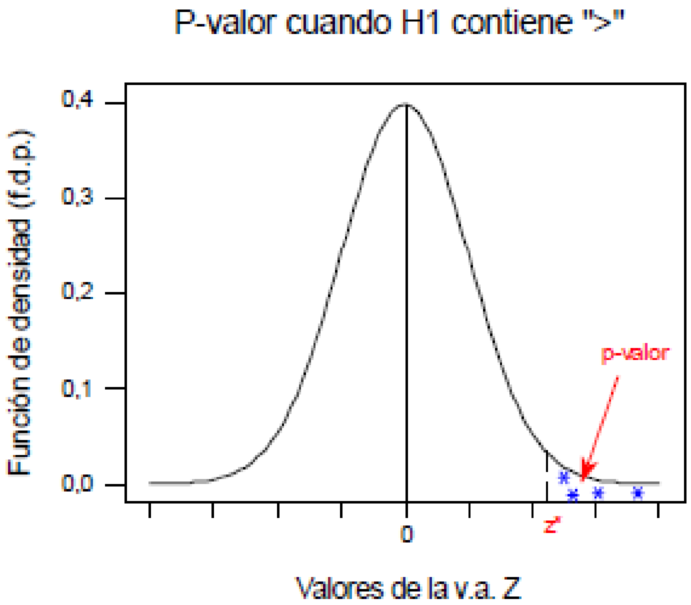
$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

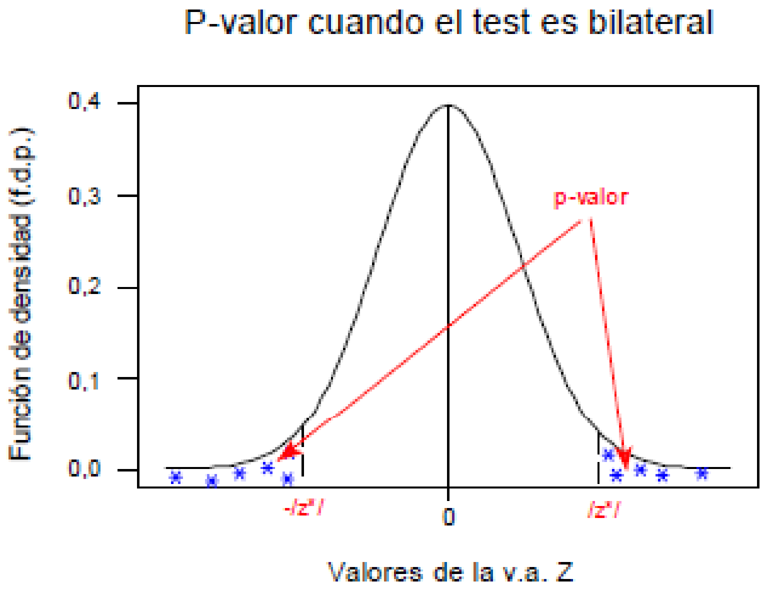
VII.3. Uso del p-valor en los contrastes sobre μ con σ conocida

Estadístico de contraste: $$z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \approx N(0{,}1)$$

- Si H_1 contiene " > " $\Rightarrow$ *p-valor* = $P(Z>z^*)$
- Si H_1 contiene " < " $\Rightarrow$ *p-valor* = $P(Z<z^*)$
- Si H_1 contiene " ≠ " $\Rightarrow$ *p-valor* = $P(Z< -|z^*| \text{ ó } Z>|z^*|) = 2\ P(Z< |z^*|)$

VII.3. Uso del p-valor en los contrastes sobre μ con σ conocida





VII.3. Uso del p-valor en los contrastes sobre μ con σ conocida

- El p-valor nos proporciona el grado de credibilidad de la hipótesis nula: si el valor de *p* fuese "muy pequeño" (inferior a 0,001), significaría que la hipótesis nula es del todo increíble (en base a las observaciones obtenidas), y por tanto la descartaríamos; si el valor de *p* oscilase entre 0,05 y 0,001 significaría que hay fuertes evidencias en contra de la hipótesis nula, por lo que la rechazaríamos o no en función del valor que hubiésemos asignado (a priori) a α.
- Finalmente, si el valor de *p* es "grande" (superior a 0,05), no habría motivos suficientes como para descartar la hipótesis nula, por lo que la tomaríamos como cierta.
- **Criterio de decisión:**
  - Descartaremos H_0 si **p-valor** $\leq \alpha$ (normalmente $\alpha = 0{,}05$).
  - En caso contrario aceptaremos H_0 (p-valor $> \alpha$)

Ejemplo utilizando la tabla de la normal

- Un banco quiere analizar si las comisiones que cobra a sus clientes por operaciones en el mercado bursátil difieren significativamente de las que cobra la competencia, cuya media es de 12 euros mensuales con una desviación estándar de 4,3 euros.
- Este banco toma una muestra de 64 operaciones bursátiles y observa que la comisión promedio es de 13,6 euros.
- Contrastar, al nivel de significación del 5%, que este banco no difiere significativamente en el cobro de las comisiones por operaciones en la Bolsa con respecto a la competencia.

Ejemplo utilizando la tabla de la normal

- Sea X = ”Comisiones que se cobran por operaciones en el mercado bursátil”
- Tenemos: $X \approx (\mu, 4{,}3)$
- Queremos contrastar:

$$H_0 : \mu = 12$$
$$H_{1:} : \mu \neq 12$$

- Es decir, queremos contrastar si μ es 12 euros como la competencia o si por el contrario es distinto de esta cantidad.

Ejemplo utilizando la tabla de la normal

- Calculamos el estadístico de contraste,

$$Z^* = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{13,6 - 12}{4,3 / \sqrt{64}} = \frac{1,6}{0,5375} = 2,98$$

- Como es un contraste de dos extremos, ahora tenemos que calcular el p-valor correspondiente a z*=2,98, es decir el área que hay por debajo de z=-2,98 más el área que hay por encima de z= 2,98, i.e., el área en las dos colas.
- Si observamos la tabla de la distribución normal estándar, podemos comprobar que el área que hay a la izquierda de z=-2,98 es 0,0014 y el área que hay a la derecha de 2,98 es también 1- 0,9986=0,0014 por lo que el p-valor= 2*0,0014=0,0028
- Como el p-valor es menor que el nivel de significación, rechazaremos la hipótesis nula a un nivel de significación del 5%.
- Por lo tanto existe evidencia estadística de que la comisión promedio que cobra este banco difiere significativamente de la competencia.

Uso del p-valor en los contrastes sobre μ con σ desconocida

- Dada una población *X* (que sigue una distribución cualquiera), con media μ y desviación estándar σ desconocidas, se trata de contrastar alguno de los tres tests siguientes:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Estadístico de contraste: $$t^* = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \approx t - Student(n-1)$$

- **Criterio de decisión:**
  - Descartaremos H0 si **p-valor** ≤ α (normalmente α = 0,05).

Ejemplo utilizando la tabla de la t-student

- La directora del departamento de personal de una importante corporación está reclutando un gran número de empleados para un puesto en el extranjero. Durante el proceso de selección, la administración le pregunta cómo van las cosas, y ella responde que cree que la puntuación promedio en la prueba de aptitudes será de aproximadamente 90 puntos.
- Cuando la administración revisa 19 de los resultados de la prueba compilados, encuentra que la puntuación media es 83,24 y la desviación estándar de esta puntuación es 11. Si la administración desea probar la hipótesis : 90 0 *H* μ = vs :μ ≠ 90 *a H* al nivel de significación del 10%, ¿Cuál es el valor del estadístico de contraste y su p-valor?

Ejemplo utilizando la tabla de la t-student

$$H_0 : \mu = 90$$
$$H_a : \mu \neq 90$$

- Suponemos que la población de resultados de todos los candidatos sigue una distribución normal . $X \approx N(\mu;\sigma)$ y entonces la distribución muestral de cada media muestral de cada muestra de cada población seguirá también una normal :

$$\bar{X} \approx N\left(\mu; \quad \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

- Como no se conocen las desviaciones estándar de las dos poblaciones, tendremos que utilizar la distribución de la t-student como distribución del estadístico de contraste.

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_{H_0}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{H_0}}{\sigma / \sqrt{n}} \approx t - student(n-1)$$

Ejemplo utilizando la tabla de la t-student

- Si calculamos el estadístico t de contraste nos queda:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{83{,}25 - 90}{11/\sqrt{19}} = -2{,}6747$$

- Como los grados de libertad son 18, entonces como tenemos un contraste de dos colas, es decir en la hipótesis alternativa aparece el distinto, es decir : H_0: μ = 90 H_1: μ ≠ 90; entonces el p-valor de t = -2,6747 será la probabilidad de estar por encima de 2,6747 más la probabilidad de estar por debajo de t =-2,6747. Cuando no aparece en la tabla de la t-student el valor exacto del estadístico del cual se quiere calcular su p-valor, se toma como referencia el valor más cercano, en este caso t=-2,5524. Por tanto el p-valor = P(t>2,5524)+P(t< -2,5524)=0,01+0,01=2*0,01=0,02, porque a la derecha de 2,5524 hay la misma probabilidad que a la izquierda de -2,5524 Así que el p-valor de t=-2,6747 será menor a 0,02 porque a mayor valor del estadístico menor área por encima como se puede ver en la tabla.

Ejemplo utilizando la tabla de la t-student

- Cuando los grados de libertad no aparezcan en la tabla de la t-student, se toma los grados de libertad más cercanos al cual se quiere tener en cuenta.
- Si el contraste hubiese sido de una cola, bien por la derecha o bien por la izquierda, : 90 1 *H* µ > ó : 90 1 *H* µ < , entonces el p–valor del estadístico (supongamos que el estadístico es t = 2,6747) si el contraste es de cola derecha, es decir (mayor que), sería la probabilidad de estar por encima de t = 2,5524 que sería 0,01, por lo que el p-valor de t = 2,6747 sería menor que 0,01.
- Si es por la cola izquierda (es decir menor que), el p-valor del estadístico (supongamos que el estadístico vale t= -2,6747) sería la probabilidad de estar por debajo de t = -2,5524 que sería 0,01, por lo que el p-valor de t= - 2,6747 sería menor que 0,01.

Glosario

- **Hipótesis**. Suposición, o conjetura, que se hace sobre un parámetro de la población.
- **Hipótesis Estadística.**
- Es una afirmación o conjetura acerca de una o más poblaciones.
- **Hipótesis Nula (H_0)**. Suposición acerca de un parámetro de la población que deseamos probar, generalmente una suposición del status quo (situación actual).
- **Hipótesis Alternativa (H_1)**. Conclusión que aceptamos cuando los datos no apoyan la hipótesis nula.

Glosario

- **Error Tipo I**. Rechazo de una hipótesis nula cuando es verdadera
- **Error Tipo II**. Aceptación de una hipótesis nula cuando es falsa.
- **Nivel de Significancia**. Valor que indica el porcentaje de los valores muestrales que se halla fuera de ciertos límites, suponiendo que la hipótesis nula sea correcta, esto es, la probabilidad de rechazarla cuando es verdadera.
- **Grados de Libertad.** Número de valores de una muestra que podemos especificar libremente, una vez que sepamos algo de ella.

Glosario

- **Distribución Ji Cuadradra**. Familia de distribuciones de probabilidad, diferenciadas por sus grados de libertad; se emplean para probar varias hipótesis sobre las varianzas, proporciones y bondad distribucional de ajuste.
- **Prueba de Independencia**. Prueba estadística de las proporciones de frecuencias, que determina si la pertenencia a las categorías de una variable es diferente en función de la pertenencia a las categorías de una segunda variable.
- **Tabla de Contingencia**. La que tiene R renglones y C columnas. Cada renglón corresponde a un nivel de una variable; cada columna, a un nivel de otra variable. Las partes del cuerpo de las tablas son las frecuencias con que ocurren cada combinación de variables.

Glosario

- **Frecuencias Esperadas**. Las que se esperan ver en una tabla de contingencia o distribución de frecuencia si la hipótesis nula es verdadera.
- **Prueba de Bondad de Ajuste**. Prueba estadística que determina si hay una diferencia significativa entre una distribución de frecuencias observadas y una distribución teórica de probabilidad que supuestamente describirían la distribución observada.